

Prof. Dr. Alfred Toth

Zeichen als Wurzeln komplexer Zahlen II

1. Der vorliegende Beitrag setzt Toth (2011) fort. Unter einer Möbius-Transformation der Ebene¹ versteht man eine rationale Funktion

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

einer komplexen Variablen z , wobei die Koeffizienten a, b, c, d komplexe Zahlen sind, welche die Gleichung $ad - bc \neq 0$ erfüllen.

2. Sei nun $\mathfrak{C}_{\sim\rho}$ der Kreis

$$(Z - (1 - \rho)i)(\bar{Z} + (1 - \rho)i) = \rho^2 \quad (-\infty < \rho < \infty).$$

Alle diese $\mathfrak{C}_{\sim\rho}$ bilden das parabolische Bündel aller Kreise, die durch $Z_0 = i$ mit den Zentren $\gamma = (1 - \rho)i$ auf der imaginären Achse laufen. Man bestimmt nun die Möbius-Transformation \mathfrak{S}_{ρ} , welche die perspektivische Abbildung der reellen Achse auf den Kreis $\mathfrak{C}_{\sim\rho}$ für die verschiedenen Werte von ρ repräsentiert. Sei zunächst $\rho > \frac{1}{2}$, so dass der Kreis $\mathfrak{C}_{\sim\rho}$ die reelle Achse in den zwei Punkten $\pm r$ schneidet, wobei

$$r = \sqrt{(2\rho - 1)},$$

genau die Fixpunkte der Möbius-Transformation \mathfrak{S}_{ρ} ergibt, die durch

$$(Z, i; -r, r) = (z, \infty; -r, r)$$

definiert ist, so dass wir weiter

$$Z = \mathfrak{S}_{\rho}(z) = \frac{iz + r^2}{z + i}$$

bekommen.

¹ Die folgende Darstellung folgt aus Gründen der Einfachheit Schwerdtfeger (1979, S. 58 f.).

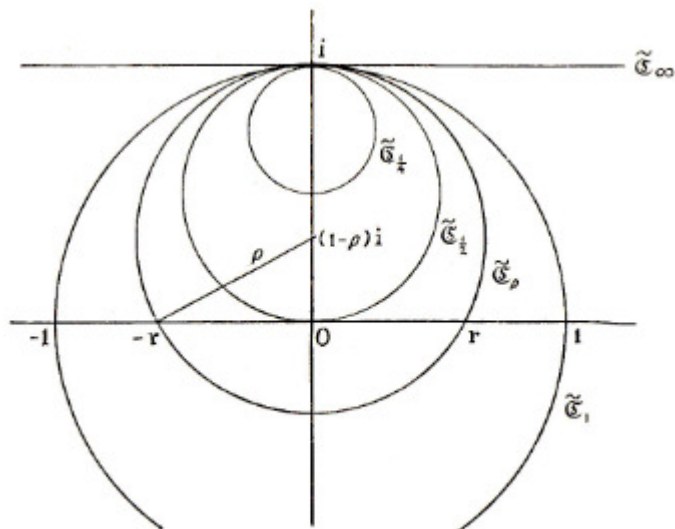


FIG. 16

Z ist nun tatsächlich die gesuchte Möbius-Transformation für alle Werte von ρ . Hier sind r und $-r$ die Fixpunkte, und i ist der Pol von \mathfrak{H}_ρ^{-1} , und zwar unabhängig von den reellen Werten von ρ . Da der Quotient

$$(Z - i) / (x - i) = (r^2 + 1) / (x^2 + 1)$$

reel list, sind

$$z = x \text{ (real)}, \quad Z = \frac{ix + r^2}{x + i}, \quad Z_0 = i$$

collinear. Somit repräsentiert \mathfrak{H}_ρ die Perspektive mit dem Zentrum i .

Falls $\rho > 1/2$, dann sind die Fixpunkte von \mathfrak{H}_ρ die beiden verschiedenen reellen Schnittpunkte von \mathfrak{C}_ρ mit der reellen Achse. Falls $\rho = 1/2$, dann fallen beide Fixpunkte zusammen, so dass es nur einen Fixpunkt $r = 0$ gibt. Und falls $\rho < 1/2$, dann sind die Fixpunkte

$$\left. \begin{matrix} r \\ \bar{r} \end{matrix} \right\} = \pm r = \pm i\sqrt{1-2\rho}.$$

Sind sind symmetrisch sowohl bezüglich der reellen Achse als auch bezüglich des Kreises \mathfrak{C}_ρ .

3. Da nach Toth (2011)

$$z = \text{ZR} = (M, O, I)$$

gilt, kann man in der obigen aus Schwerdtfeger (1979, S. 58) reproduzierten Figur den die Einheitswurzeln von z enthaltenden Kreis als Hülle des semiotischen Raumes (vgl. Bense 1975, S. 65 f.) auffassen. Die oben formal eingeführten drei inneren Kreise des „parabolic pencils“ entsprechen dann in konzentrischer Reihenfolge den Hüllen von I , O und M , wobei im Einklang mit Bense (1979, S. 53)

$$\text{ZR} = (((I \supset O \supset M) \supset (O \supset M)) \supset M)$$

gilt. Durch die Definition des Zeichens als Wurzel komplexer Zahlen kann man somit nicht nur die vollständige Relation, sondern auch alle Partialrelationen in der Gaußschen Zahlenebene verorten.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Schwerdtfeger, Hans, Geometry of Complex Numbers. Dover 1979

Toth, Alfred, Zeichen als Wurzeln komplexer Zahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

10.6.2011